Chapitre 14 : Systèmes du premier degré à deux inconnues

Professeur : Ismail OUDAHA

Plan de cours

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

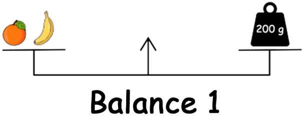
I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

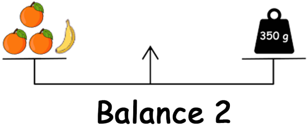
Activité :

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Activité :

Dans la figure suivante, les deux balances sont en équilibre :





1) Soit x le poids d'une orange et y le poids d'une banane. Écrire chaque équilibre sous forme d'une équation convenable.

2) Parmi les couples suivants , déterminer lesquels qui vérifie l'équation de balance 1 : $(60; 80)$, $(100; 50)$, $(80; 50)$

3) Parmi les couples suivants , déterminer lesquels qui vérifie l'équation de balance 2 : $(105; 30)$, $(100; 50)$, $(90; 120)$

4) Parmi les couples suivants , déterminer lesquels qui vérifie simultanément les deux équations : $(100; 50), (90; 120)$

Définition :

Définition :

Soient a, a', b, b', c et c' des nombres réels. On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute écriture de la forme :

$$\begin{cases} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{cases}$$

d'inconnues x et y .

Exemples :

Exemples :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad et \quad (S_2) \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = \frac{2}{3} \\ -3x + y = 2 \end{cases}$$

(S_1) et (S_2) sont deux systèmes de premier degré à deux inconnues.

II-Résolution d'un système :

II-Résolution d'un système :

Définition :

II-Résolution d'un système :

Définition :

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples (x, y) (s'ils existent) pour lesquels les deux équations sont vérifiées simultanément.

II-Résolution d'un système :

Définition :

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples (x, y) (s'ils existent) pour lesquels les deux équations sont vérifiées simultanément.

Remarque :

II-Résolution d'un système :

Définition :

Résoudre un système, c'est trouver tous les couples (x, y) (s'ils existent) pour lesquels les deux équations sont vérifiées simultanément.

Remarque :

La résolution des systèmes se divise en deux parties :

1. **La résolution algébrique :**
   on a deux méthodes :
   - Méthode de substitution
   - Méthode de combinaison linéaire.
2. **La résolution graphique**

1) La résolution algébrique d'un système :

1) La résolution algébrique d'un système :

A- Méthode de substitution :

1) La résolution algébrique d'un système :

A- Méthode de substitution :

Définition :

1) La résolution algébrique d'un système :

A- Méthode de substitution :

Définition :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, et le remplacer dans l'autre équation pour trouver une équation à une inconnue.

1) La résolution algébrique d'un système :

A- Méthode de substitution :

Définition :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, et le remplacer dans l'autre équation pour trouver une équation à une inconnue.

Remarque :

1) La résolution algébrique d'un système :

A- Méthode de substitution :

Définition :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, et le remplacer dans l'autre équation pour trouver une équation à une inconnue.

Remarque :

On utilise de préférence, la méthode par substitution lorsque l'une des deux inconnues a pour coefficient 1 ou -1 .

Exemple :

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 2x + y = 11 & (1) \\ x + 3y = 18 & (2) \end{cases}$$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 2x + y = 11 & (1) \\ x + 3y = 18 & (2) \end{cases}$$

- Dans l'équation (1), on écrit y en fonction de x, donc :

$$y = 11 - 2x \quad (3)$$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y & = & 11 & (1) \\ x+3y & = & 18 & (2) \end{array}\right.$$

- Dans l'équation (1), on écrit y en fonction de x, donc :

$$y = 11 - 2x \quad (3)$$

- On substitue y dans l'équation (2), on trouve :

$$\begin{array}{rcl} x+3(11-2x) & = & 18 \\ x+33-6x & = & 18 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
-5x &= 18 - 33 \\
-5x &= -15 \\
x &= \frac{-15}{-5} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x &= 18 - 33 \\ -5x &= -15 \\ x &= \frac{-15}{-5} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- On remplace x par 3 dans l'équation (3) :

$$y = 11 - 2 \times 3 = 11 - 6 = 5$$

$$\begin{aligned} -5x &= 18 - 33 \\ -5x &= -15 \\ x &= \frac{-15}{-5} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- On remplace x par 3 dans l'équation (3) :

$$y = 11 - 2 \times 3 = 11 - 6 = 5$$

Donc le couple $(3, 5)$ est la solution du système (S).

Application :

Application :

Résoudre par substitution les systèmes suivants :

$$(E_1)\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ 3x - y & = & 2 \end{cases} \qquad (E_2)\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ 4x - 2y & = & 6 \end{cases}$$

B- Méthode de combinaison linéaire :

B- Méthode de combinaison linéaire :

Définition :

B- Méthode de combinaison linéaire :

Définition :

Cette méthode consiste à multiplier chaque équation du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients opposés pour la même inconnue, après on additionne les deux équations trouvés membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue.

B- Méthode de combinaison linéaire :

Définition :

Cette méthode consiste à multiplier chaque équation du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients opposés pour la même inconnue, après on additionne les deux équations trouvés membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue.

Remarque :

B- Méthode de combinaison linéaire :

Définition :

Cette méthode consiste à multiplier chaque équation du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients opposés pour la même inconnue, après on additionne les deux équations trouvés membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue.

Remarque :

On utilise de préférence la méthode de combinaison linéaire si on a deux termes opposés pour la même inconnue.

Exemple :

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y & = & -1 & (1) \\ 3x-2y & = & 1 & (2) \end{cases}$$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 3x-2y &= 1 \qquad (2) \end{cases}$$

- <u>**Élimination de y**</u> :

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 3x-2y &= 1 \qquad (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y :**

  - On multiplie les membres de l'équation (2) par 2, donc :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 2\times(3x-2y) &= 2\times 1 \qquad (2) \end{cases}$$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 3x-2y &= 1 \qquad (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y :**

  - On multiplie les membres de l'équation (2) par 2, donc :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 2\times(3x-2y) &= 2\times 1 \qquad (2) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$(S)\begin{cases} -5x+4y &= -1 \qquad (1) \\ 6x-4y &= 2 \qquad (2) \end{cases}$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

C'est à dire : $\quad x = 1$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

C'est à dire : $x = 1$

- **Élimination de x** :

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

C'est à dire : $x = 1$

- **Élimination de x** :
  - On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et les membres de l'équation (2) par 5, donc :

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

C'est à dire : $x = 1$

- <u>**Élimination de x**</u> :
  - On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et les membres de l'équation (2) par 5, donc :

$$(S)\begin{cases} 3 \times (-5x + 4y) = 3 \times (-1) & (1) \\ 5 \times (3x - 2y) = 5 \times 1 & (2) \end{cases}$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-5x + 4y + 6x - 4y = -1 + 2$$

C'est à dire : $\quad x = 1$

- **<u>Élimination de x</u>** :
  - On multiplie les membres de l'équation (1) par 3 et les membres de l'équation (2) par 5, donc :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} 3 \times (-5x + 4y) & = & 3 \times (-1) & \quad (1) \\ \\ 5 \times (3x - 2y) & = & 5 \times 1 & \quad (2) \end{array}\right.$$

C'est à dire :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} -15x + 12y & = & -3 & \quad (1) \\ \\ 15x - 10y & = & 5 & \quad (2) \end{array}\right.$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-15x + 12y + 15x - 10y = -3 + 5$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-15x + 12y + 15x - 10y = -3 + 5$$

C'est à dire :

$$2\,y = 2$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-15x + 12y + 15x - 10y = -3 + 5$$

C'est à dire :

$$2\,y = 2$$

C'est à dire :

$$y = \frac{2}{2} = 1$$

- On ajoute membre à membre ces deux équations, donc :

$$-15x + 12y + 15x - 10y = -3 + 5$$

C'est à dire :

$$2\,y = 2$$

C'est à dire :

$$y = \frac{2}{2} = 1$$

Donc le couple $(1, 1)$ est la solution du système (S).

Technique 2 :

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2y = 1$$

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2\,y = 1$$

C'est à dire : $3 - 2y = 1$

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2\,y = 1$$

C'est à dire : $3 - 2y = 1$

C'est à dire : $-2y = 1 - 3$

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2\,y = 1$$

C'est à dire : $3 - 2y = 1$

C'est à dire : $-2y = 1 - 3$

C'est à dire : $-2y = -2$

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2\,y = 1$$

C'est à dire : $3 - 2y = 1$

C'est à dire : $-2y = 1 - 3$

C'est à dire : $-2y = -2$

C'est à dire : $y = \dfrac{-2}{-2} = 1$

Technique 2 :

Dans l'étape 2, au lieu d'éliminer x par combinaison linéaire, on le remplace juste dans l'une des équations.

On a : $x = 1$, on remplace dans l'équation (2), donc :

$$3 \times 1 - 2\,y = 1$$

C'est à dire : $3 - 2y = 1$

C'est à dire : $-2y = 1 - 3$

C'est à dire : $-2y = -2$

C'est à dire : $y = \dfrac{-2}{-2} = 1$

On trouve donc le même couple $(1, 1)$.

Remarque :

Remarque :

Il faut respecter la méthode demandée dans l'exercice.

Remarque :

Il faut respecter la méthode demandée dans l'exercice.

Application :

Remarque :

Il faut respecter la méthode demandée dans l'exercice.

Application :

Résoudre par combinaison linéaire les systèmes suivants :

$$(E_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ -x+4y & = & 3 \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y & = & 3 \\ 5x+2y & = & -5 \end{array}\right.$$

2) La résolution graphique d'un système :

2) La résolution graphique d'un système :

Activité :

2) La résolution graphique d'un système :

Activité :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -3x - y = -1 \end{cases}$$

Soient (Δ) : $-2x + y = 1$ et (D) : $-3x - y = -1$

1. Montrer que $(\Delta) : y = 2x + 1$ et $(D) : y = -3x + 1$
2. Tracer (D) et (Δ) dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.
3. Déterminer la position relative de (D) et (Δ).
4. Déterminer dans le repère les cordonnées du point d'intersection de (D) et (Δ).
5. Déduire la solution du système.

Définition :

Définition :

Cette méthode consiste à lier chaque équation du système par une droite, et déterminer le couple de coordonnées de leur point d'intersection (s'ils se coupent), cela dans un repère orthonormé, alors ce couple est la solution du système.

Exemple :

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Étape 1 : Trouver les équations réduites :

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Étape 1 : Trouver les équations réduites :

On a : $4x - y - 2 = 0$, donc : $y = 4x - 2$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Étape 1 : Trouver les équations réduites :

On a : $4x - y - 2 = 0$, donc : $\quad y = 4x - 2$

On a : $2x - y + 2 = 0$, donc : $\quad y = 2x + 2$

Exemple :

Résolvons le système :

$$(S)\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Étape 1 : Trouver les équations réduites :

On a : $4x - y - 2 = 0$, donc : $\quad y = 4x - 2$

On a : $2x - y + 2 = 0$, donc : $\quad y = 2x + 2$

On considère les deux droites (D_1) et (D_2) tel que :

$$\begin{cases} (D_1) : \ y = 4x - 2 \\ (D_2) : \ y = 2x + 2 \end{cases}$$

- On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes.

- On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes.

- **Étape 2 : La représentation des droites (D_1) et (D_2) :**

- On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes.

- Étape 2 : La représentation des droites (D_1) et (D_2) :

x	0	1
y	2	4
M (x,y)	A (0,2)	B (1,4)

(D_1)

x	0	1
y	-2	2
M (x,y)	E (0,-2)	F (1,2)

(D_2)

- On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles sont sécantes.

- Étape 2 : La représentation des droites (D_1) et (D_2) :

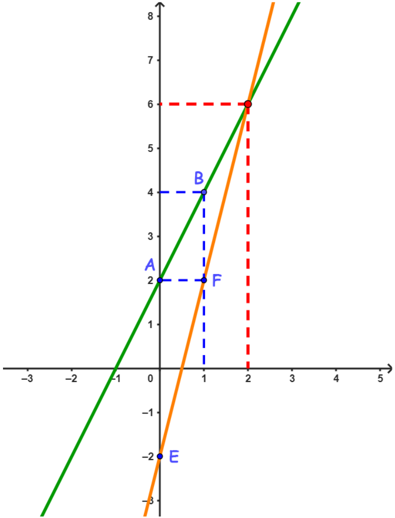
x	0	1
y	2	4
M (x,y)	A (0,2)	B (1,4)

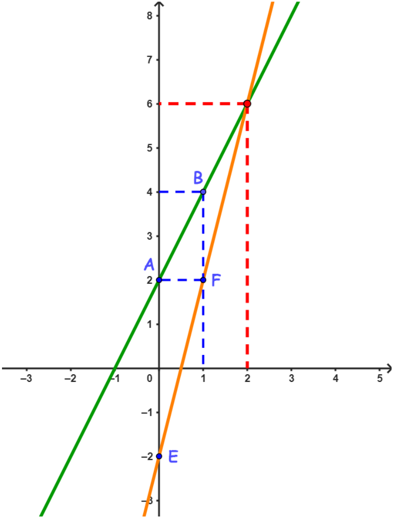
(D_1)

x	0	1
y	-2	2
M (x,y)	E (0,-2)	F (1,2)

(D_2)

Traçons donc (D_1) et (D_2) dans repère orthonormé $(O; I; J)$.


8
7
6
5
B
4
3
A
2
F
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
E
−3



On remarque que les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent au point $(2, 6)$, alors le couple $(2, 6)$ est la solution du système.

III- Systèmes et problèmes :

III- Systèmes et problèmes :

Règle :

III- Systèmes et problèmes :

Règle :

La résolution d'un problème déroule en 4 étapes :

1) **Choix des inconnues :** Trouvés à la question.

2) **Mise en système :** Transformation des données en équations.

3) **Résolution du système :** Algébriquement.

4) **Retour au problème :** Vérification de la solution et réponse à la question.

Exemple :

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Soit x le premier nombre et soit y le deuxième nombre.

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Soit x le premier nombre et soit y le deuxième nombre.

2) Mise en système :

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Soit x le premier nombre et soit y le deuxième nombre.

2) Mise en système :

- Puisque la somme est égale 10273, alors $x + y = 10273$

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Soit x le premier nombre et soit y le deuxième nombre.

2) Mise en système :

- Puisque la somme est égale 10273, alors $x + y = 10273$
- Puisque la différence est égale 2589, alors $x - y = 2589$

Exemple :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

1) Choix des inconnues :

Soit x le premier nombre et soit y le deuxième nombre.

2) Mise en système :

- Puisque la somme est égale 10273, alors $x + y = 10273$
- Puisque la différence est égale 2589, alors $x - y = 2589$

Donc les système est donné par :

$$\begin{cases} x + y = 10273 & (1) \\ x - y = 2589 & (2) \end{cases}$$

3) Résolution du système :

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 10273 & (1) \\ x - y = 2589 & (2) \end{cases}$$

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x+y = 10273 & (1) \\ x-y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y** :

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 10273 & (1) \\ x - y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y** :

  On ajoute membre à membre les deux équations, alors :

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x+y = 10273 & (1) \\ x-y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y** :

On ajoute membre à membre les deux équations, alors :

$$x+y+x-y = 10273+2589$$

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 10273 & (1) \\ x - y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y** :

On ajoute membre à membre les deux équations, alors :

$$x + y + x - y = 10273 + 2589$$

C'est à dire : $2\,x = 12862$

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 10273 & (1) \\ x - y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y :**

On ajoute membre à membre les deux équations, alors :

$$x + y + x - y = 10273 + 2589$$

C'est à dire : $2\,x = 12862$

C'est à dire : $x = \dfrac{12862}{2}$

3) Résolution du système :

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x+y = 10273 & (1) \\ x-y = 2589 & (2) \end{cases}$$

- **Élimination de y** :

On ajoute membre à membre les deux équations, alors :

$$x+y+x-y = 10273+2589$$

C'est à dire : $2\,x = 12862$

C'est à dire : $x = \dfrac{12862}{2}$

C'est à dire : $x = 6431$

Remplaçons x par 6431 dans l'équation (1), alors :

Remplaçons x par 6431 dans l'équation (1), alors :

$$6431 + y = 10273$$

Remplaçons x par 6431 dans l'équation (1), alors :

$$6431 + y = 10273$$

C'est à dire :

$$y = 10273 - 6431$$

Remplaçons x par 6431 dans l'équation (1), alors :

$$6431 + y = 10273$$

C'est à dire :

$$y = 10273 - 6431$$

C'est à dire :

$$y = 3842$$

Remplaçons x par 6431 dans l'équation (1), alors :

$$6431 + y = 10273$$

C'est à dire :

$$y = 10273 - 6431$$

C'est à dire :

$$y = 3842$$

Donc la solution du système est le couple $(6431, 3842)$

4) Retour au problème :

4) Retour au problème :

- On a :

$$\begin{cases} 6431 + 3842 = 10273 \\ 6431 - 3842 = 2589 \end{cases}$$

4) Retour au problème :

- On a :

$$\begin{cases} 6431 + 3842 = 10273 \\ 6431 - 3842 = 2589 \end{cases}$$

- Donc , le premier nombre est : 6431

4) Retour au problème :

- On a :

$$\begin{cases} 6431 + 3842 & = & 10273 \\ 6431 - 3842 & = & 2589 \end{cases}$$

- Donc , le premier nombre est : 6431

- Le deuxième nombre est : 3842

Applications :

Applications :

1. Trouver deux nombres dont la somme est égale à 10273 et la différence est égale à 2589.

2. Le périmètre d'un rectangle est 24 cm.Si on augmente la longueur de 2 cm et la largeur de 3 cm l'aire augmentera de 37 cm^2. calculons les dimensions initiales de ce rectangle.